L'INDICE DE MASLOV DANS LES JB^*-TRIPLES

STÉPHANE MERIGON

Résumé. Soit E un JB^*-triple dont l'ensemble des tripotents inversibles Σ n'est pas vide. Nous construisons un indice invariant par homotopie sur les chemins dans Σ qui respectent une condition de type Fredholm par rapport un tripotent fix. Cet indice gnralise l'indice de Maslov pour la Fredholm-Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique de dimension infinie dfini dans [BBF98]. Lorsque E est de dimension finie, nous relions cet indice l'indice triple gnralis de [CØ01, Cle04] et l'indice de Souriau gnralis de [CK07].

Abstract. Let E be a JB^*-triple whose set of invertible tripotents Σ is not empty. We construct a homotopy invariant index for paths in Σ that satisfie a Fredhom type condition with respect to a fixed invertible tripotent. This index generalises the Maslov index for the Fredholm-Lagrangian of an infinite dimensional symplectic Hilbert space defined in [BBF98]. When E is finite dimensional we make the connection with the generalised triple index of [CØ01, Cle04] and the generalised Souriau index of [CK07].

0. Introduction

Dans son trait *thorie des perturbations et mthodes asymptotiques*, V.P. Maslov introduit un indice pour les chemins dans la Lagrangienne d'un espace symplectique rel de dimension finie qui intervient dans le prolongement de solutions asymptotiques d'quations aux drives partielles. Dans [Arn67] (voir aussi [Arn85]), Arnold clarifie la dfinition de cet indice. Soit (H, ω) un espace symplectique rel de dimension $2n$ et notons $\Lambda(n)$ sa Lagrangienne. Pour tout $\lambda \in \Lambda(n)$ et tout $1 \leq k \leq n$ posons

$$\Lambda_\lambda^k(n) = \{\mu \in \Lambda(n) \mid \dim \mu \cap \lambda = k\}.$$

Alors

$$\overline{\Lambda_\lambda^1(n)} = \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda_\lambda^k(n)$$

est un cycle de lieu singulier $\sum_{2 \leq k \leq n} \Lambda_\lambda^k(n)$. Il existe sur H un produit scalaire $(.,.)$ et une structure complexe J isomtrique tels que

$$\forall \eta, \xi \in H, \quad \omega(\xi, \eta) = (J\xi, \eta).$$

Date: 16 juin 2009.

Key words and phrases. Indice de Maslov, Domaines borns symtriques en dimension infinie, JB^*-triples.

On peut alors orienter $\overline{\Lambda^1_\lambda(n)}$ transversalement grce au champ

$$v(\mu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}_{|\theta=0} e^{J\theta}\mu,$$

le cot positif tant celui vers lequel $v(\mu)$ est dirig. L'indice (par rapport λ) d'un chemin γ dont les extrmits ne sont pas dans le cycle est par dfinition l'indice d'intersection de γ avec ce cycle : si l'ensemble des points d'intersection de γ avec le cycle est fini et contenu dans $\Lambda^1_\lambda(n)$ et si en chacun de ces points γ est continment diffrentiable alors l'indice de Maslov est le nombre de points o γ traverse le cycle dans le sens positif moins le nombre de points o γ traverse le cycle dans le sens ngatif. Lorsque l'on se restreint aux chemins ferms on obtient un lment du groupe de cohomologie entire $H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$ qui ne dpend pas de λ.

Remarquons que l'orthogonal (pour le produit scalaire) d'un lagrangien λ est $\lambda^\perp = J\lambda$. Fixons une base orthogonale de λ et identifions H $\mathbb{C}^n$ muni de la forme hermitienne $\langle .,. \rangle = (.,.) - i\omega(.,.)$ par :

$$\begin{aligned} H \simeq \lambda \oplus \lambda^\perp &\simeq \mathbb{C}^n \\ \eta \oplus J\xi &\mapsto \eta + i\xi. \end{aligned}$$

Alors le groupe $U(n)$ des matrices complexes unitaires de taille n agit transitivement sur $\Lambda(n)$ et le stabilisateur de λ s'identifie au sous-groupe des matrices relles $O(n)$:

$$\Lambda(n) \simeq U(n)/O(n).$$

On peut donc dfinir une application $\mathrm{Det}^2 : \Lambda(n) \to S^1$ et Arnold montre qu'elle induit un isomorphisme des groupes fondamentaux :

$$\pi_1(\Lambda(n)) \simeq \pi_1(S^1).$$

Ainsi on a

$$H_1(\Lambda(n), \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(\Lambda(n))$$

et il revient donc au mme de se donner un gnrateur de $H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$ ou un isomorphisme $\pi_1(\Lambda(n)) \simeq \mathbb{Z}$. Arnold montre que l'indice de Maslov concide avec l'image rciproque par Det^2 du gnrateur standard de $\pi_1(S^1)$ (le nombre de tours sur S^1 orient dans le sens trigonomtrique).

Motiv par une justification rigoureuse de la mthode de Maslov, Leray donne une variante de la dfinition d'Arnold-Maslov (cf. [Ler77]). L'indice apparat comme une fonction sur le double produit du revtement universel de la Lagrangienne et ralise une primitive d'un cocycle dfini sur les triplets de lagrangiens appel indice d'inertie. Enfin Souriau, grce une construction explicite du revtement universel, donne une formule explicite pour la fonction de Maslov (cf. [Sou76]).

Dans [BBF98] Booss-Bavnbek et Furutani gnralisent l'indice de Maslov pour la Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique de dimension infinie H. Soit λ un lagrangien de H. L'indice est dfini pour les chemins dans la Fredholm-Lagrangienne $\mathcal{F}\Lambda_\lambda$, c'est--dire l'ensemble des lagrangiens μ tels que (λ, μ) est une paire de Fredholm :

$$\dim \lambda \cap \mu < \infty \quad \text{et} \quad \dim H/(\lambda + \mu) < \infty,$$

et il ralise un isomorphisme entre $\pi_1(\mathcal{F}\Lambda_\lambda)$ et $\mathbb{Z}$.

Dans une autre direction, Jean-Louis Clerc et Bent Ørsted ont montr (cf. [CØ01, CØ03, Cle04]) que l'indice triple se gnralise naturellement la frontire de Shilov S d'un domaine born symtrique de type tube $\mathcal{D}$, et qu'il permet de caractriser les orbites de triplets transverses de S sous l'action du groupe des automorphismes holomorphes de $\mathcal{D}$. Puis Clerc et Koufany (cf. [CK07]) ont construit de deux manires diffrentes une primitive de l'indice triple sur le revtement universel de la frontire de Shilov, l'une gnralisant la mthode de Souriau et l'autre celle d'Arnold-Maslov. A la fin des annes 70, Kaup et Upmeier ont dvelopp la thorie des domaines born symtriques dans les espaces de Banach, le rsultat principal tant que la catgorie des domaines borns symtriques est quivalente celle des JB^*-triples. Dans cet article nous construisons l'indice de Maslov pour l'ensemble des tripotents inversibles d'un JB^*-triple, en adaptant la construction de Booss-Bavnbek et Furutani.

Le paragraphe 2 prsente la structure de JB^*-triple et son lien avec les domaines borns symtriques. Dans le paragraphe 3, nous dtaillons l'identification entre la Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique rel $H_0 \oplus H_0$ et l'ensemble des tripotents inversibles du JB^*-triple $Sym(H_0 \oplus iH_0)$. Dans le paragraphe 4 nous introduisons la dfinition d'une paire de Fredholm pour deux units d'un JB^*-triple, et l'indice de transversalit d'une telle paire (x, e) et nous tudions comment volue cet indice lorsque l'on perturbe x. Cette tude nous permet de construire dans le paragraphe 5 l'indice de Maslov d'un chemin $t \mapsto x(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ tel que $(x(t), e)$ soit une paire de Fredholm pour tout t. Enfin dans le paragraphe 6 on se restreint la dimension finie pour montrer le lien entre cet indice et ceux de Clerc, Koufany et Ørsted.

Remerciements. Je tiens a remercier K.H. Neeb de m'avoir signaler une erreur dans la version précédente de cet article.

Notations. Si X est un espace topologique, On note $C(X)$ l'algbre des fonctions complexes continues sur X. Si E et F sont deux espaces de Banach, on note $L(E, F)$ l'espace de Banach des oprateurs linaires continus de E dans F muni de la norme d'oprateur et on pose $L(E) = L(E, E)$. Si $\mathcal{B}$ est une algbre de Banach (associative) complexe et $x \in \mathcal{B}$, on note $sp(\mathcal{B}, x)$ le spectre de x dans $\mathcal{B}$. Lorsque $\mathcal{B} = L(E)$ on note simplement $sp(x)$ s'il n'y a pas d'ambigut.

1. JB^*-TRIPLES ET DOMAINES BORNS SYMTRIQUES

Un JB^*-triple est la donne d'un espace de Banach complexe $(E, |.|)$ et d'une application (on note $\overline{E}$ l'espace conjugu de E)

$$Q \; : \; E \to L(\overline{E}, E)$$

quadratique et continue, telle que si l'on note

$$\{x, y, z\} = L(x, y)z = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))z$$

le systme triple associ on ait l'*identit triple de Jordan* :

$$\{u, v, \{x, y, z\}\} = \{\{u, v, x\}, y, z\} - \{x, \{v, u, y\}, z\} + \{x, y, \{u, v, z\}\}$$

et les proprits suivantes pour tout x de E :

(1) $L(x, x)$ est un oprateur hermitien positif,

(2) $|\{x, x, x\}| = |x|^3$.

Une algbre de Jordan Banach est un espace de Banach $(E, |.|)$ muni d'un produit commutatif $x \circ y$ tel que

(1) $|x \circ y| \leq |x| \, |y|$,

(2) $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y), \quad \forall x, y \in E.$

Supposons E complexe et muni d'une involution antilinaire $*$. Alors

$$\{x, y, z\} = x \circ (y^* \circ z) + z \circ (y^* \circ x) - (x \circ z) \circ y^*$$

vrifie l'identit triple de Jordan et E est appele une JB^*-algbre si l'on a

$$|\{x, x, x\}| = |x|^3, \quad \forall x \in E.$$

Si E possde un neutre, c'est alors un JB^*-triple. Une algbre de Jordan Banach relle A est appele JB-algbre si l'on a

(1) $|x^2| = |x|^2$,

(2) $|x^2| \leq |x^2 + y^2|, \quad \forall x, y \in A.$

La partie relle d'une JB^*-algbre est une JB-algbre et rciproquement, tant donne une JB-algbre A, il existe sur $E = A \otimes \mathbb{C}$ une unique norme prolongeant celle de A et qui fait de E (muni du produit tendu par linarit) une JB^*-algbre (cf [Wri77]).

Si E est une C^*-algbre de produit xy alors E muni du produit de Jordan

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

devient une JB^*-algbre. Une JB^*-algbre qui est isomorphe une sous JB^*-algbre (ie. un sous-espace ferm stable par le produit de Jordan) d'une C^*-algbre est dite *spciale*.

Un ouvert connexe et born $\mathcal{D}$ d'un espace de Banach E est appel domaine born symtrique si chacun de ses points on peut associer un automorphisme holomorphe involutif de $\mathcal{D}$ dont il est un point fixe isol.

Un tel domaine est homogne sous son groupe d'automorphismes et biholomorphiquement quivalent un domaine born cercl (ie. contenant l'origine et invariant sous l'action des nombres complexes de module 1) et toil par rapport l'origine [Vig76]. Une telle ralisation est unique isomorphisme linaire prs (car un biholomorphisme d'un domaine cercl conservant l'origine est linaire). L'ensemble des champs de vecteurs complets sur $\mathcal{D}$ est une algbre de Lie Banach et le groupe des biholomorphismes de $\mathcal{D}$ peut tre muni d'une structure de groupe de Lie Banach relle dont l'algbre de Lie s'y identifie (cf. [Vig76, Upm76, Upm85]). Lorsque $\mathcal{D}$ est ralis comme domaine cercl cette algbre de Lie que l'on notera $\mathfrak{g}$ se dcompose suivant les espaces propres de l'action de la symtrie l'origine :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

de sorte que $\mathfrak{k}$ est constitu de champs linaires et que l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &\to E \\ X &\mapsto X(0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de Banach. De plus il existe une application $Q : E \to L(\overline{E}, E)$ quadratique et continue telle que pour tout $v \in E$ l'unique champ X_v de $\mathfrak{p}$ tel que $X_v(0) = v$ s'crive

$$X_v(z) = v - Q(z)v.$$

Cette application fait de E un JB^*-triple dont la boule unit concide avec $\mathcal{D}$. Rciproquement la boule unit d'un JB^*-triple est un domaine born symtrique (cf. [Kau77, Kau83]).

Un lment x d'un JB^*-triple E est dit inversible si $Q(x)$ l'est. On note

$$x^{\#} = Q(x)^{-1}x.$$

On appelle tripotent tout lment tel que $Q(x)x = x$ et on note Σ l'ensemble des tripotents inversibles de E. C'est une sous-varit banachique de E. Si $e \in \Sigma$ alors le produit

$$x \circ y := L(x)y := \{x, e, y\}$$

et l'involution $Q(e)$ font de E une JB^*-algbre de neutre e que l'on notera $E^{(e)}$ et le systme triple associ $E^{(e)}$ est bien celui de E. Pour cette raison on appelle parfois Σ l'ensemble des units de E. On notera $A(e)$ la partie relle de $E^{(e)}$ et

$$P(x) = Q(x)Q(e)$$

la reprsentation quadratique. Un lment x dans E est donc inversible si et seulement si $P(x)$ l'est et on dfinit son inverse dans $E^{(e)}$ par

$$x^{-1} = P(x)^{-1}x = Q(e)x^{\#}.$$

Notons $x^* = Q(e)x$. Alors

$$\Sigma = \{x \in E \mid x^* = x^{-1}\}.$$

La notion d'inversibilité dans une algèbre de Jordan que nous avons introduite est due à N. Jacobson, qui a montré qu'elle est quivalente la dfinition classique : x est inversible si et seulement si il existe un lment y tel que $x \circ y = e$ et $x^2 \circ y = x$, auquel cas y est unique et est appel l'inverse de x (si E est une algbre de Jordan spciale, alors ces deux proprits sont quivalentes $xy = yx = 1$, cf. [Jac68, p.51]).

L'operateur de Bergman de E est par défini par

$$B(x, y) := Id - 2L(x, y) + Q(x)Q(y).$$

Le couple (x, y) est dit *transverse* lorsque $B(x, y)$ est inversible. Lorsque $y = e \in \Sigma$, on a $B(x, e) = Q(x - e)Q(e) = P(x - e)$. Donc le couple (x, e) est transverse si et seulement si il est inversible.

Le spectre de x dans $E^{(e)}$, noté $Sp(x, e)$, est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\lambda e - x$ n'est pas inversible. Alors d'après un théorème de J. Martinez Moreno (cf. [MM80] et [Kau83]) :

$$sp(L(x)) \subset \frac{1}{2}(Sp(x, e) + Sp(x, e)),$$

et

$$sp(P(x)) \subset Sp(x, e)Sp(x, e).$$

On appelle tripotent rgulier un tripotent x tel que $\ker L(x, x) = 0$ et on note S leur ensemble. Lorsque la dimension de E est finie (la thorie devient celle des systmes triples de Jordan hermitiens positifs cf. [Loo77]), si Σ est non vide alors $\Sigma = S$ (car S est homogne sous le groupe des automorphismes du systme triple). En dimension infinie ce n'est plus le cas, mais S s'identifie toujours la frontire extrmale (au sens de la convexit) de $\overline{\mathcal{D}}$, et Σ est une runion de composantes connexes de S (cf. [KU77, BKU78]).

2. La Lagrangienne comme frontire de Shilov de $Sym(H)$

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert complexe (sparable). Le produit hilbertien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est antilinaire par rapport la seconde variable. Soit τ une involution (ie. une application $\mathbb{C}$-antilinaire involutive) isomtrique de H. On note $\mathrm{Sym}(H)$ l'espace de Banach des oprateurs symtriques pour la forme bilinaire symtrique

$$(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \tau(\cdot) \rangle .$$

Pour $z \in \mathrm{L}(H)$, on pose

$$\overline{z} = \tau \circ z \circ \tau.$$

L'espace de Banach $\mathrm{Sym}(H)$ muni du produit triple

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(x\overline{y}z + z\overline{y}x)$$

est un JB^* -triple. En effet, c'est un sous-systme triple de Jordan ferm de $\mathrm{L}(H)$ et on peut donc appliquer [Upm85, 20.9].

Soit $z \in \mathrm{Sym}(H)$. On voit facilement que la notion d'inversibilité coïncide avec celle des opérateurs (en effet, si x est inversible comme opérateur alors $Q(x)$ l'est, et si $Q(x)$ est inversible, alors $\mathrm{id} = x(Q(x)^{-1}\,\mathrm{id})x$ et donc x est inversible), et que, puisque,

$$\overline{x}x = \mathrm{id} \Rightarrow x\overline{x} = \mathrm{id},$$

les tripotents maximaux sont inversibles :

$$\Sigma = S = \{x \in \mathrm{Sym}(H) \mid \overline{x}x = \mathrm{id}\}.$$

L'oprateur de Bergman s'crit

$$\begin{aligned} B(x,y)z &= z - (x\overline{y}z + z\overline{y}x) + x\overline{y}z\overline{y}x \\ &= (1 - x\overline{y})z(1 - \overline{y}x), \end{aligned}$$

et lorsque x et y sont dans Σ on a

$$B(x,y)z = Q(y-x)Q(y)z = (1 - xy^{-1})z(1 - y^{-1}x),$$

et le couple (x, y) est transverse si et seulement si $y - x$ est inversible.

Considrons la structure de JB^*-algbre sur $\mathrm{Sym}(H)$ dfinie par le tripotent inversible id. Le produit s'crit

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

et l'involution

$$x^* = \overline{x}.$$

Soit $H_0 = \ker(\tau - \mathrm{id})$ la forme relle de H associe τ. Alors la partie autoajointe de la JB^*-algbre $\mathrm{Sym}(H)$ s'identifie l'espace $\mathrm{Sym}(H_0)$ des oprateur symtriques de H_0 (qui est donc une JB-algbre).

Introduisons maintenant un peu de vocabulaire et quelques notations. Soit $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert rel ou complexe. Une forme bilinaire antisymtrique ω continue et fortement non-dgnre (ie. telle que l'application $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, $\xi \mapsto \omega(\cdot, \xi)$ est bijective) est appele *forme symplectique*. Supposons $\mathcal{H}$ muni d'une telle forme. On dit alors que $\mathcal{H}$ est un *espace de Hilbert symplectique*. Pour un sous-espace $F \subset \mathcal{H}$, on note F° l'orthogonal de F pour ω, alors que l'on note $F^\perp$ l'orthogonal pour la structure Hilbertienne. Un *lagrangien* de $\mathcal{H}$ est un sous-espace λ tel que $\lambda^\circ = \lambda$. Un lagrangien est automatiquement ferm (car $(F^\circ)^\circ = \overline{F}$ pour tout sous espace F). On appelle *Lagrangienne* l'ensemble des lagrangiens de $\mathcal{H}$, et on la note $\Lambda(\mathcal{H})$.

On pose $\mathbb{H} = H \oplus H = \{\eta \oplus \xi \mid \xi, \eta \in H\}$. C'est un espace de Hilbert pour la forme hermitienne

$$\langle \eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi' \rangle = \langle \eta, \eta' \rangle + \langle \xi, \xi' \rangle\,,$$

et on muni $\mathbb{H}$ d'une structure symplectique (complexe) en posant

$$\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = (\eta, \xi') - (\xi, \eta').$$

L'involution τ s'étend à $\mathbb{H}$ en posant

$$\tau(\eta \oplus \xi) = \tau(\eta) \oplus \tau(\xi).$$

Alors $\mathbb{H}_0 = H_0 \oplus H_0$ est la forme relle de $\mathbb{H}$ asocie τ, et puisque la forme symplectique vérifie

$$\omega(\tau(\eta \oplus \xi), \tau(\eta' \oplus \xi')) = \overline{\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi')},$$

on peut la restreindre à $\mathbb{H}_0$ en une forme symplectique réelle. Nous allons montrer comment l'ensemble Σ s'identifie la lagrangienne $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ de $\mathbb{H}_0$.

Commenons par envoyer $\mathrm{Sym}(H)$ dans $\Lambda(\mathbb{H})$.

Notons $H_1 = H \oplus 0$ et $H_2 = 0 \oplus H$, π_1 et π_2 les projections sur H_1 (resp. H_2) parallèlement à H_2 (resp. H_1). Si $x \in \mathrm{L}(H)$ alors

$$G(x) := \{x\xi \oplus \xi \mid \xi \in H\}$$

est un sous-espace fermé de $\mathbb{H}$. Il est de plus transverse à H_1 (ie. $G(x) \oplus H_1 = \mathbb{H}$) car $\xi \oplus \eta = \xi' \oplus (x\xi' + \eta')$, $\xi, \eta, \xi', \eta' \in H$ se résout de manière unique en $\xi = \xi'$, $\eta' = \eta - x\xi$. Réciproquement, soit F un sous-espace fermé et transverse à H_1 et $\pi : F \to H_2$ la restriction de π_2 à F. L'application π est bijective parce que F est transverse et comme H_1 est un supplémentaire fermé π est continue et donc d'après le théorème de Banach elle est bicontinue. Alors $\pi_1 \circ \pi^{-1} \in \mathrm{L}(H)$ et $G(\pi_1 \circ \pi^{-1}) = F$. Remarquons que H_1 et H_2 sont dans $\Lambda(\mathbb{H})$. Si $x \in \mathrm{L}(H)$ on note ${}^{t}x$ le transposé de x par rapport à $(.,.)$. Alors $G({}^{t}x) = G(x)^{\circ}$. En effet l'inclusion $G({}^{t}x) \subset G(x)^{\circ}$ est clair et si il n'y avait pas égalité on aurait $G(x)^{\circ} \cap H_2 \neq \{0\}$ ce qui impliquerait $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$. L'application G induit donc une bijection entre $\mathrm{Sym}(H)$ et les lagrangiens transverses à H_1.

Posons $J(\eta \oplus \xi) = (-\xi) \oplus \eta$. Alors $\omega(\cdot, \cdot) = (J\cdot, \cdot)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda(\mathbb{H})$, $\lambda^{\perp} = J\tau(\lambda)$.

Pour caractériser l'image de Σ par l'application G introduisons la forme hermitienne

$$h(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = \langle \xi, \xi' \rangle - \langle \eta, \eta' \rangle.$$

Proposition 2.1. *Soit λ un lagrangien sur lequel h est une forme positive. Alors λ est transverse à H_1.*

Démonstration. Soit λ un lagrangien sur lequel h est une forme positive. Si $\eta \oplus 0 \in \lambda$ alors

$$h(\eta \oplus 0, \eta \oplus 0) = -\langle \eta, \eta \rangle \geq 0$$

donc $\eta = 0$ et $\lambda \cap H_1 = \{0\}$. Comme

$$(\lambda + H_1)^{\perp} = \lambda^{\perp} \cap H_1{}^{\perp} = J\tau(\lambda) \cap J\tau(H_1) = J\tau(\lambda \cap H_1) = \{0\},$$

il suffit de montrer que $\lambda + H_1$ est fermé. Soit $(\zeta_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\lambda + H_1$ qui converge vers $\zeta \in \mathbb{H}$. Pour tout entier n, $\zeta_n = \xi_n + \eta_n + \eta'_n$ avec $\xi_n \in H_2$, $\eta_n, \eta'_n \in H_1$ et $\xi_n + \eta_n \in \lambda$. ξ_n est la projection orthogonale de ζ_n sur H_2 et converge donc vers la projection orthogonale ξ de η sur H_2. D'autre part, $h(\xi_n + \eta_n, \xi_n + \eta_n) = \langle \xi_n, \xi_n \rangle - \langle \eta_n, \eta_n \rangle \geq 0$ donc $(\eta_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée et on peut extraire une suite, toujours notée $(\eta_n)_{\mathbb{N}}$, qui converge faiblement vers η. Mais H_1 est fermé pour la topologie forte et convexe donc fermé pour la topologie faible et donc $\eta \in H_1$. Comme $\xi_n + \eta_n$ converge faiblement vers $\xi + \eta$ et que η'_n converge faiblement vers $\eta' = \zeta - \xi - \eta$, on en déduit de même que $\xi + \eta \in \lambda$ et $\eta' \in H_1$. Par unicité de la limite on obtient la décomposition $\zeta = \xi + \eta + \eta'$ qui nous permet de conclure que $\zeta \in \lambda + H_1$. Finalement, λ est bien transverse à H_1. $\square$

Alors h s'annule sur $\lambda = G(x)$ si et seulement si pour tout $\xi \in H$, $\langle x\xi, x\xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle$, ie. si et seulement si $\langle (1 - x^*x)\xi, \xi\rangle = 0$ ce qui équivaut par polarisation à $x^*x = 1$. En rsum,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(H) &\overset{G}{\hookrightarrow} \Lambda(\mathbb{H}) \\ \Sigma &\simeq \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{H}) \mid h_{|\lambda\times\lambda} = 0\}. \end{aligned}$$

On définit la transformée de Cayley sur $\mathbb{H}$ par

$$C(\eta \oplus \xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\eta + i\xi) \oplus (i\eta + \xi)).$$

On a

$$\omega(C\cdot, C\cdot) = \omega(\cdot, \cdot) \quad \text{et} \quad ih(\cdot, \cdot) = \omega(C\cdot, \tau(C\cdot)).$$

Donc C conserve les lagrangiens de $\mathbb{H}$, et les lagrangiens sur lesquels h s'annule sont transformés en les lagrangiens stables par τ. Il ne reste plus qu' identifier l'ensemble des lagrangiens stables par τ et $\Lambda(\mathbb{H}_0)$.

Si F_0 est un sous-espace de $\mathbb{H}_0$, alors $F_0 \oplus iF_0$ est un sous-espace complexe de $\mathbb{H}$ stable par τ . Rciproquement, si F est un sous-espace de $\mathbb{H}$ stable par τ, alors $F = F \cap \mathbb{H}_0 \oplus F \cap i\mathbb{H}_0 = F \cap \mathbb{H}_0 \oplus i(F \cap \mathbb{H}_0)$. De plus il est clair que si F_0 est un lagrangien rel, alors $F_0 \oplus iF_0$ est un lagrangien complexe et que si F est un lagrangien complexe, alors $F \cap \mathbb{H}_0$ est un lagrangien rel. On a donc une bijection entre la Lagrangienne réelle et l'ensemble $\Lambda(\mathbb{H})^\tau$ des lagrangiens complexes stables par τ. Finalement on a bien une bijection entre Σ et la Lagrangienne réelle :

$$\Sigma \overset{G}{\simeq} \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{H}) \mid h_{|\lambda\times\lambda} = 0\} \overset{C}{\simeq} \Lambda(\mathbb{H})^\tau \simeq \Lambda(\mathbb{H}_0).$$

La Lagrangienne $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ est munie d'une structure de varit banachique (cf. [Fur04]). La bijection que nous avons dcrite est alors un diffomorphisme. Nous n'crivons pas les dtails.

Rciproquement, partons maintenant d'un espace de Hilbert symplectique rel $(\mathbb{H}_0, \omega, \langle\cdot, \cdot\rangle)$. On peut supposer, quitte remplacer le produit scalaire par un autre dfinissant une norme quivalente, que la forme symplectique et le produit scalaire sont *compatibles*, c'est-à-dire qu'ils sont liés par la relation

$$\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot\rangle$$

où J est à la fois un opérateur orthogonal et une structure complexe (cf. [Fur04, Appendix D]). Soit $H_0 \in \Lambda(\mathbb{H}_0)$. Alors H_0 est fermé et

$H_0^\perp = JH_0$. Suivant la décomposition $\mathbb{H}_0 = H_0 \oplus JH_0 \simeq H_0 \oplus H_0$,

$$\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = \langle \eta, \xi' \rangle - \langle \xi, \eta' \rangle$$

et on peut étendre ω et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}$ et poser $H = H_0 \oplus iH_0$ pour se retrouver dans la situation du paragraphe prcdent.

La notion de *paire de Fredholm* est essentielle dans la dfinition de l'indice de Maslov en dimension infinie. La paire de lagrangiens $(\lambda, \mu) \in \Lambda(\mathbb{H}_0)^2$ est appelée paire de Fredholm si

$$\dim \lambda \cap \mu < \infty \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{H}_0/(\lambda + \mu) < \infty.$$

La Fredholm-Lagrangienne relativement λ est alors

$$\mathcal{F}\Lambda_\lambda = \{\mu \in \Lambda(\mathbb{H}_0) \mid (\mu, \lambda) \text{ est une paire de Fredholm}\}.$$

L'indice de Maslov relativement λ est dfini pour les chemins (continus) dans la Fredholm-Lagrangienne relativement λ (cf. [BBF98, Fur04]). Nous voulons maintenant traduire cette notion dans la ralisation de la Lagrangienne comme ensemble des tripotents inversibles de $\mathrm{Sym}(H)$. Soient x et y deux opérateurs de H, et $G(x)$ et $G(y)$ leurs graphes dans $\mathbb{H}$. Alors

$$\ker(y - x) = \pi_2(G(x) \cap G(y)),$$

et

$$H/\ker(y - x) \simeq G(x)/G(x) \cap G(y)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} G(x) + G(y) &= \{x\xi \oplus \xi + y\xi' \oplus \xi' \mid \xi, \xi' \in H\} \\ &= \{(x\xi + y\xi') \oplus (\xi + \xi') \mid \xi, \xi' \in H\} \\ &= \{(x\zeta + (y - x)\xi') \oplus \zeta \mid \zeta, \xi' \in H\} \\ &= G(x) + ((y - x)H \oplus 0). \end{aligned}$$

En considérant l'application

$$\begin{gathered} \mathbb{H} \to H_1 \to H_1/((y - x)H \oplus 0) \\ \xi \oplus \eta \mapsto (\eta - x\xi) \oplus 0 \mapsto ((\eta - x\xi) \oplus 0) + ((y - x)H \oplus 0) \end{gathered}$$

on obtient l'isomorphisme

$$\mathbb{H}/G(x) + G(y) \simeq H/(y - x)H.$$

Supposons maintenant que x et y sont dans Σ, et soient λ et μ les lagrangiens associes. Comme C et l'application qui un lagrangiens rel associe le lagrangien complexe qu'il engendre, respectent l'intersection et la somme, on en déduit que λ et μ forment une paire transverse (ie. $\lambda \oplus \mu = \mathbb{H}_0$) si et seulement si $y - x$ est inversible, ie. si et seulement si (x, y) est transverse, et forment une paire de Fredholm si et seulement si $y - x$ est un opérateur de Fredholm sur H. De plus, π_2 tant injective sur $G(x) \cap G(y)$, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(y - x) = \dim \lambda \cap \mu.$$

On peut considrer $\mathbb{H}_0$ comme un espace de Hilbert complexe grce la la structure presque complexe J et au produit hilbertien

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_J = \langle \cdot, \cdot \rangle - i\omega(\cdot, \cdot).$$

On note alors $U(\mathbb{H}_0, J)$ le groupe des oprateur unitaires. Puisque $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle$, on voit que $U(\mathbb{H}_0, J)$ agit sur $\Lambda(\mathbb{H}_0)$. Cette action est de plus transitive. En effet, soient λ et μ deux lagrangiens. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne relle de $\mathbb{H}_0$. Alors comme $\mathbb{H}_0 = \lambda \oplus \lambda^\perp = \lambda \oplus J\lambda$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne complexe de $\mathbb{H}_0$. De mme une base hilbertienne relle $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de μ est une base hilbertienne complexe de $\mathbb{H}_0$. On sait qu'il existe un oprateur unitaire envoyant la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur la base $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et un tel oprateur envoie λ sur μ.

Nous voulons maintenant transporter l'action de $U(\mathbb{H}_0, J)$ en une action d'un groupe (caractriser) sur Σ. Soit $U \in U(\mathbb{H}_0, J)$. Notons $U_\mathbb{C}$ l'extension $\mathbb{C}$-linaire de U $\mathbb{H}$. Alors $U_\mathbb{C}$ agit sur $\Lambda(\mathbb{H})$, et prserve $\Lambda(\mathbb{H})^\tau$. Pour tout $a, b, c, d \in H_0$, un calcul montre que

$$C^{-1}U_\mathbb{C}C((a + ib) \oplus (c + id)) = (a' - ib') \oplus (c'' + id''),$$

o $a', b', c'', d'' \in H_0$ sont dfinis par

$$a' \oplus b' = U(a \oplus (-b)) \quad \text{et} \quad c'' \oplus d'' = U(c \oplus d).$$

Remarquons que $C^{-1}U_\mathbb{C}C$ laisse $H_1 = H \oplus 0$ et $H_2 = 0 \oplus H$ stables et notons

$$u = (C^{-1}U_\mathbb{C}C)_{|H_1} \quad \text{et} \quad v = (C^{-1}U_\mathbb{C}C)_{|H_2}.$$

On considre u et v comme des oprateurs sur H. Ce sont des oprateurs unitaires de H car $C^{-1}U_\mathbb{C}C$ est unitaire. Soit $x \in \mathrm{Sym}(H)$. Alors

$$C^{-1}U_\mathbb{C}C(G(x)) = G(uxv^{-1}).$$

Montrons que $v^{-1} = {}^t u$. Il suffit de montrer que pour tout $a, b \in H_0$,

$$(u(a + ib), v(a + ib)) = (a + ib, a + ib),$$

donc que

$$(a' - ib', a'' + ib'') = (a + ib, a + ib),$$

ou encore, en dveloppant (le produit hermitiens et la forme bilinaire concidant sur H_0), que

$$\langle a', a'' \rangle + \langle b', b'' \rangle + i(\langle a', b'' \rangle - \langle b', a'' \rangle) = \langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle + 2i \langle a, b \rangle .$$

Mais comme $U \in U(\mathbb{H}_0, J)$,

$$\langle U(a \oplus (-b)), U(a \oplus b) \rangle_J = \langle a \oplus (-b), a \oplus b \rangle_J ,$$

donc

$$\langle a' \oplus b', a'' \oplus b'' \rangle_J = \langle a \oplus (-b), a \oplus b \rangle_J ,$$

ce qui donne la relation voulue. En rsum, l'action de $U(\mathbb{H}_0, J)$ sur $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ se transporte en une action (transitive) du groupe unitaire $U(H)$ sur

Σ (on peut en effet montrer que l'on obtient bien tout $U(H)$), et cette action est la restriction de l'action de $U(H)$ sur $\mathrm{Sym}(H)$ dfinie par

$$U(H) \times \mathrm{Sym}(H) \to \mathrm{Sym}(H), \quad (u, z) \mapsto uz{}^{t}u.$$

Remarquons pour conclure que $U(H)$ agit par automorphismes du systme triple de Jordan $\mathrm{Sym}(H)$.

3. Les paires de Fredholm et l'indice de transversalit

Dans cette partie on considre un JB^*-triple E tel que Σ n'est pas vide. Soit $e \in \Sigma$. Les notations sont celles du paragraphes 2. Soit $x \in \Sigma$ et soit $C^*(x, e)$ la sous-algbre ferme de $E^{(e)}$ engendre par e, x et $x^* = Q(e)x$.

Proposition 3.1. *Soient* $(x, e) \in \Sigma^2$. *Alors*

(i) $C^*(x, e)$ *est associative et c'est donc une* C^**-algèbre commutative.*

(ii) Le spectre $U_{x,e}$ *de* x *dans* $C^*(x, e)$ *est contenu dans le cercle unit, et c'est aussi le spectre de* x *dans* $E^{(e)}$.

(iii) La paire (x, e) *est transverse, ie.* $B(x, e)$ *est inversible, si et seulement si* $1 \notin U_{x,e}$.

Démonstration. Dans $E^{(e)}$, $x^* = x^{-1}$. Or on a $[L(x), L(x^{-1})] = 0$ (cf. [Upm85, 19.26]) et donc $C^*(x, e)$ est fortement associative, en particulier associative. Le systme triple $C^*(x, e)$ est donc lui aussi associatif et l'on a (cf. [Upm85, 20.32]), pour tout $u, v \in C^*(x, e)$, $|u \circ v| \leq |u|\,|v|$. On crit alors comme dans [Upm85, 20.33], pour $z \in C^*(x, e)$,

$$|z|^3 = |\{z, z, z\}| = |z \circ (z^* \circ z)| \leq |z|\,|z^* \circ z| \leq |z|^2\,|z^*| = |z|^3\,.$$

Donc $C^*(x, e)$ est une C^*-algbre. Comme x est unitaire dans cette C^*-algbre, son spectre est contenu dans le cercle unité. Or $C^*(x, e)$ est contenue dans une sous-algbre fortement associative maximale (et ferme) de $E^{(e)}$, et le spectre de x dans cette sous-algbre est gal au spectre de x dans $C^*(x, e)$, puisque celui-ci est gal sa frontire. Mais cette sous-algbre fortement associative maximale est pleine dans l'algbre de Jordan $E^{(e)}$ (ie. ses éléments y sont inversible si et seulement si ils sont inversibles dans $E^{(e)}$, cf. [Hes96, MM77]), et donc le spectre de x dans $C^*(x, e)$ est gal au spectre de x dans $E^{(e)}$. La dernire assertion dcoule immdiatement de la prcdente et du fait que $B(x, e) = Q(x - e)Q(e) = P(x - e)$. □

Puisque $C^*(x, e)$ est engendre (comme C^*-algbre) par x et e, on a l'isomorphisme de Gelf'and :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{x,e} : & C^*(x, e) \to C(U_{x,e}), \\ & y \mapsto \hat{y}, \end{aligned}$$

qui à l'lment x associe la fonction $\hat{x}(\mu) = \mu$.

Proposition 3.2. *Soit* $(x,e) \in \Sigma^2$. *On a*

$$U_{e,x} = \overline{U_{x,e}}.$$

Dmonstration. Cela rsulte du fait que $Q(e - \lambda x)$ est inversible si et seulement si $Q(x - \lambda^{-1} e)$ l'est. $\square$

Supposons maintenant que $1 \notin U_{x,e}$ ou bien que 1 est isol dans $U_{x,e}$. Alors la fonction caractristique $\chi_{\{1\}}$ de $\{1\}$ est continue sur $U_{x,e}$. On note alors

$$p = p(x,e) = {\mathcal{G}_{x,e}}^{-1}(\chi_{\{1\}})$$

le projecteur associ 1, et

$$A_p(e) = \{p, A(e), p\}.$$

On dit que 1 est de multiplicit finie si $A_p(e)$ est une JB-algbre de rang finie, ie.

$$A_p(e) = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q$$

o chaque A_j est une algbre de Jordan euclidienne simple (cf. [FK94]) ou un facteur spin (ie. la JB-algbre, de rang 2, $H \oplus \mathbb{R}$ o H est un espace de Hilbert), le rang de $A_p(e)$ tant alors par dfinition

$$\operatorname{rang} A_p(e) = \operatorname{rang}(A_1) + \cdots + \operatorname{rang}(A_q).$$

Dfinition 3.3. *Soit* $(x,e) \in \Sigma$. *On dit que* (x,e) *est une paire de Fredholm lorsque* (x,e) *est transverse, ou lorsque* 1 *est isol dans* $U_{x,e}$, *et est de multiplicit finie.*

On dfinit alors l'indice de transversalit de la paire de Fredholm comme le rang de $A_p(e)$,

$$\mu(x,e) = \operatorname{rang} A_p(e).$$

Lorsque 1 est isol mais que $A_p(e)$ n'est pas de rang fini, on pose $\mu(x,e) = \infty$.

Exemple 3.4. Considrons le JB^*-triple $E = \mathrm{Sym}(H)$. Les notations sont celles du paragraphe prcdent. En particuliers τ dsigne l'involution de H et H_0 la forme relle associe. Soit $(x,e) \in \Sigma^2$. Alors xe^{-1} est unitaire, donc normal. Soit $C^*(xe^{-1})$ la sous-algbre ferme de $\mathrm{L}(H)$ engendre par id, xe^{-1}, et $(xe^{-1})^* = ex^{-1}$. Alors la multiplication droite par e est un isomorphisme de $C^*(xe^{-1})$ sur $C^*(x,e)$ (qui envoie id sur e et xe^{-1} sur x). Supposons que 1 est isol dans $U_{x,e}$. Notons p le projecteur associ 1 dans $C^*(x,e)$ et $p' = pe^{-1}$ le projecteur associ 1 dans $C^*(xe^{-1})$. L'oprateur p' est une projection au sens usuel, et l'on a

$$\ker(\mathrm{id} - xe^{-1}) = p'H.$$

Nous avons vu au chapitre prcdent que l'action du groupe unitaire $U(H)$ sur Σ par automorphismes du systme triple E (dfinie par $z \mapsto vz{}^{\mathrm{t}}v$) est transitive. En particuliers, il existe $u \in U(H)$ tel que $e = u{}^{\mathrm{t}}u$.

Alors $A(e)$ (la partie autoadjointe de E pour l'involution dfinie par e) est isomorphe Sym(H_0) :

$$A(e) = A(u \operatorname{id} {}^t u) = uA(\operatorname{id}){}^t u \simeq A(\operatorname{id}) \simeq \operatorname{Sym}(H_0).$$

Soit $p'' = u^{-1} p \, {}^t u^{-1}$. C'est un projecteur de Sym(H_0), ie. une projection de H laissant H_0 stable. De plus

$$A_{p''}(\operatorname{id}) = p'' \operatorname{Sym}(H_0) p'' \simeq \operatorname{Sym}(p'' H_0),$$

comme on peut le voir en crivant la "matrice" d'un oprateur $z \in$ Sym(H_0) relativement la dcomposition $H_0 = p''H_0 \oplus (1 - p'')H_0$, et donc

$$A_p(e) \simeq \operatorname{Sym}(p'' H_0).$$

Ainsi $A_p(e)$ est de rang fini si et seulement si $p''H_0$ est de dimension finie. De plus

$$\ker(\operatorname{id} - xe^{-1}) = pe^{-1}H = pH = p \, {}^t u^{-1} H = up'' H,$$

donc

$$\dim \ker(\operatorname{id} - xe^{-1}) = \dim_{\mathbb{C}} p'' H = \dim_{\mathbb{R}} p'' H_0,$$

et lorsque l'un des deux membres est fini,

$$\dim \ker(e - x) = \operatorname{rang} A_p(e).$$

Montrons que dans ce cas, $x - e$ est un oprateur de Fredholm. Puisque

$$(\operatorname{id} - xe^{-1})^* = \operatorname{id} - ex^{-1} = (x - e)x^{-1} = (xe^{-1} - \operatorname{id})ex^{-1},$$

on a

$$\operatorname{codim} \overline{\operatorname{im}(\operatorname{id} - xe^{-1})} = \dim \ker(\operatorname{id} - xe^{-1}),$$

et il reste montrer que $\operatorname{id} - xe^{-1}$ est d'image ferme. Grce l'isomorphisme de Gelf'and on voit que $(1 - (xe^{-1} - p'))$ est inversible, et l'on a

$$\operatorname{id} - p' = (\operatorname{id} - xe^{-1})(1 - (xe^{-1} - p'))^{-1}.$$

Donc

$$\operatorname{im}(\operatorname{id} - xe^{-1}) = \operatorname{im}(\operatorname{id} - p') = \ker p'$$

est bien ferm. Rciproquement, si $x - e$ est un oprateur de Fredholm, c'est aussi le cas de $\operatorname{id} - xe^{-1}$. Mais lorsque 0 est isolé dans la frontire du spectre d'un oprateur de Fredholm, il est en fait isol. Il en résulte que 1 est isol dans $U_{x,e}$.

Revenons au cas gnral.

Proposition 3.5. *Soit* $(x, e) \in \Sigma^2$. *Alors* 1 *est isol dans* $U_{x,e}$ *si et seulement si* 0 *est isol dans* $B(x, e)$.

Démonstration. Posons $U = U_{x,e} = Sp(x,e)$. Dans l'algbre de Jordan unitaire $E^{(e)}$ on a $B(x,e) = P(x-e)$, et le thorme de J. Martinez Moreno,
$$sp(P(x-e)) \subset (1-U)(1-U).$$
Donc si 1 est isol dans U, alors 0 est isol dans $sp(B(x,e))$.

Pour tablir la rciproque, on montre que
$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset sp(P(x-e)).$$

Commenons par monter que
$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial_{ext}(1-U)(1-U),$$
o $\partial_{ext}K$ est la frontire de la composante connexe non borne du complmentaire du compact K. Tout lment $1-\lambda \in 1-\mathbb{U}$ s'crit de manire unique $2\cos\frac{\Theta}{2}e^{i\frac{\Theta}{2}}$ avec $-\pi < \Theta \leq \pi$, et alors
$$(1-\lambda)^2 = 4\cos^2\frac{\Theta}{2}e^{i\Theta}.$$
Soient $2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $2\cos(\Theta-\frac{\theta}{2})e^{i(\Theta-\frac{\theta}{2})}$ dans $1-\mathbb{U}$: leur produit vaut
$$4\cos\frac{\theta}{2}\cos(\Theta-\frac{\theta}{2})e^{i\Theta} = 2\big(\cos\Theta + \cos(\Theta-\theta)\big)e^{i\Theta}.$$
Or la fonction $\theta \mapsto \cos\Theta + \cos(\Theta-\theta)$ est maximale pour $\Theta = \theta$. La demi-droite $]4\cos^2\frac{\Theta}{2}, +\infty[e^{i\Theta}$ est donc entirement contenue dans le complmentaire de $(1-U)(1-U)$, et cela implique notre assertion. Considrons
$$\mathcal{B} = \{T \in \mathrm{L}(E) \mid TC^*(x,e) \subset C^*(x,e)\}.$$
C'est une sous-algbre ferme de $\mathrm{L}(E)$ qui contient $P(x-e)$. Le spectre de $P(x-e)$ dans $\mathcal{B}$ est constitu de $sp(P(x-e))$ et, ventuellement, de certains de ses trous (ie. les composantes connexes bornes de son complmentaire). De plus, en considrant le morphisme
$$\mathcal{B} \to \mathrm{L}(C^*(x,e)),\ T \mapsto T_{|C^*(x,e)},$$
on a, puisque $sp(P(x-e)_{|C^*(x,e)}) = \{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\}$, l'inclusion
$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset sp(P(x-e), \mathcal{B}).$$
Il rsulte alors de
$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial_{ext}(1-U)(1-U)$$
que
$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial sp(P(x-e), \mathcal{B}).$$
Comme $\partial sp(P(x-e), \mathcal{B}) \subset \partial sp(P(x-e))$, il vient
$$\{(1-\lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial sp(P(x-e)).$$
Et donc si $1 \in U$ n'est pas isol, alors $0 \in sp(P(x-e))$ n'est pas isol. $\square$

On note Σ_e le composante connexe de Σ contenant e, et $\mathcal{F}\Sigma_e$ l'ensemble des $x \in \Sigma$ tels que (x,e) est une paire de Fredholm.

Proposition 3.6. *Soit Σ_e la composante connexe de Σ contenant e. Alors*
$$\mathcal{F}\Sigma_e \subset \Sigma_e.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{F}\Sigma_e$. Alors $U_{x,e}$ n'est pas $\mathbb{U}$ tout entier, puisque soit 1 n'y est pas, soit 1 y est mais est isol, et on peut donc définir $\log x \in C^*(x,e)$, log étant une détermination adéquate du logarithme. Alors $P(\exp(\frac{1}{2}\log x))e = x$ et donc on a bien $x \in \Sigma_e$. $\square$

Considrons $(x,e) \in \Sigma^2$ et soit $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. On a $U_{x,e^{i\theta}e} = e^{-i\theta}U_{x,e}$, et donc si $e^{i\theta}$ est isol dans $U_{x,e}$, alors 1 est isol dans $U_{x,e^{i\theta}e}$, et on peut dfinir $p(x,e^{i\theta}e)$ et $\mu(x,e^{i\theta}e)$.

Un sous-ensemble σ de $U_{x,e}$ est dit spectral lorsque il est la fois ouvert et ferm. Cela revient dire que la fonction caractristique χ_σ est continue.

Lemme 3.7. *Soient $(x,e) \in \Sigma^2$ et σ un sous-ensemble spectral de $U_{x,e}$. Si $p = \mathcal{G}^{-1}_{(x,e)}(\chi_\sigma)$ alors $P(p)x$ et p sont deux unités de $P(p)E$ et on a les propriétés suivantes :*

(i) $P(p)C^*(x,e) = C^*(P(p)x,p) \subset C^*(x,e)$,

(ii) $U_{P(p)x,p} = \sigma$.

Démonstration. Comme $P(p)E$ est un sous système triple de E, il est clair que p et $P(p)$ sont des tripotents de $P(p)E$. Pour voir que $P(p)x$ y est inversible, on montre que $P(p)x^{-1}$ est l'inverse de $P(p)x$ dans l'algèbre de Jordan $P(p)E^{(e)}$. Mais en calculant dans $C(U_{x,e})$ on voit facilement que $\{P(p)x, p, P(p)x^{-1}\} = p$ et que $\{(P(p)x)^2, p, P(p)x^{-1}\} = P(p)x$.

(1) Puisque $p \in C^*(x,e)$, on a
$$P(p)x^2 = pxxp = pxxp^2 = pxpxp = pxppxp = (P(p)x)^2.$$

(2) Si $\lambda \notin U_{P(p)x,p}$ alors il existe $z \in C^*(P(p)x,p)$ tel que
$$(\lambda p - P(p)x)z = p.$$

Soit $g(\mu) = (1-\chi_\sigma(\mu))(\lambda-\mu)^{-1}$ pour $\mu \in U_{P(p)x,p}$. Alors
$$g(x)(\lambda e - x) = e - p.$$

Grâce à (1), $(\lambda e - x)z = (\lambda e - x)P(p)z = (\lambda e - x)pzp = (\lambda p - P(p)x)z = p$ et
$$(g(x)+z)(\lambda e - x) = e - p + p = e.$$

Donc $\lambda \notin U_{x,e}$. Réciproquement, si $\lambda \notin \sigma$ soit $h(\mu) = \chi_\sigma(\mu)(\lambda-\mu)^{-1}$ pour $\mu \in U_{x,e}$. Alors $h(x)(\lambda e - x) = p$ donc
$$P(p)h(x)(\lambda p - P(p)x) = ph(x)p((\lambda p - pxp) = ph(x)(\lambda e - x)p = p.$$
$\square$

Pour $0 < \varepsilon < \pi$ on note

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{e^{i\theta} \mid 0 < |\theta| \leq \varepsilon\}.$$

Lemme 3.8 (Perturbation de l'indice de transversalit). *Soit* (x, e) *une paire de Fredholm. Il existe* $0 < \varepsilon < \pi$ *tel que* 1 *est la seule valeur spectrale de* x *dans* $\mathcal{A}_\varepsilon$. *Il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* x *tel que pour tout tripotent inversible* $y \in \mathcal{V}$, *le spectre de* y *dans* $\mathcal{A}_\varepsilon$ *est fini et ne contient pas* $e^{\pm i\varepsilon}$, *et*

$$\mu(x, e) = \sum_{|\theta| \leq \varepsilon} \mu(y, e^{i\theta} e).$$

Démonstration. Puisque 1 est isolé (ou n'est pas) dans $U_{x,e}$, soit $0 < \varepsilon < \pi$ tel que $U_{x,e} \cap \mathcal{A}_\varepsilon = \emptyset$. Dans une algèbre de Jordan Banach, l'ensemble des éléments inversibles est ouvert, donc il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que

$$\forall y \in \mathcal{V} \quad y - e^{\pm i\varepsilon} e \text{ est inversible.}$$

Alors si y est une unité dans $\mathcal{V}$, $\sigma_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \cap U_{y,e}$ est un sous-ensemble spectral et on peut donc définir $q(y, e, \sigma_\varepsilon) = \mathcal{G}_{y,e}^{-1}(\chi_{\sigma_\varepsilon})$. Alors (cf. par exemple [DS88, IX, lemma 13])

$$p(x, e) = \int_{|\lambda - 1| = \varepsilon} \frac{1}{2i\pi} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

et

$$q(y, e, \sigma_\varepsilon) = \int_{|\lambda - 1| = \varepsilon} \frac{1}{2i\pi} (\lambda e - y)^{-1} d\lambda,$$

ce qui montre, l'inversion étant continue, que si y est suffisamment proche de x, alors $q(y, e, \sigma_\varepsilon)$ l'est suffisamment de $p(x, e)$. Or si p est un idempotent d'une JB-algèbre A, tout idempotent q dans un voisinage de p peut s'écrire

$$q = \exp k_v(p)$$

où $v \in A_{\frac{1}{2}}(p)$ et $\exp k_v$ est un automorphisme de A (cf. [CI00]). Quitte à restreindre $\mathcal{V}$, on a donc, en faisant $p = p(x, e)$ et $q = q(y, e, \sigma_\varepsilon)$: pour tout y dans $\mathcal{V}$, $A_q(e)$ est isomorphe à $A_p(e)$. En particulier, si $A_p(e)$ est de rang fini alors $A_q(e)$ aussi et les rangs sont égaux. De plus, dans ce cas, d'aprs le lemme prcdent, l'ensemble σ_ε est fini. Supposons $\sigma_\varepsilon = \{e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_l}\}$ et soit $q_j = \mathcal{G}_{y,e}^{-1}(e^{i\theta_j})$, alors en faisant le calcul dans $C(U_{y,e})$, on voit que les q_j sont des idempotents deux deux orthogonaux tels que

$$q = q_1 + \cdots + q_l,$$

et donc $\operatorname{rang}(q) = \operatorname{rang}(q_1) + \cdots + \operatorname{rang}(q_l)$. □

4. L'indice de Maslov

On considre dans cette partie un chemin continu $x: [0,1] \to \Sigma$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $(x(t), e)$ soit une paire de Fredholm. En particulier, pour tout t, 1 est une valeur propre isole de multiplicit finie de $x(t)$ par rapport e. Les rsultats suivant gnralisent ceux de [Fur04] et grce la partie prcdente les dmonstrations sont semblables et parfois laisses au lecteur.

Lemme 4.1. *Il existe une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ et des rels $\varepsilon_j \in]0, \pi[$, $j = 1 \dots N$ tels que $\forall t \in [t_{j-1}, t_j]$*

$$\mu(x(t), e, \pm\varepsilon_j) = 0,$$

et

$$Sp(x(t), e) \cap \mathcal{A}_{\varepsilon_j} \quad \textit{consiste en un nombre fini de valeurs propres isoles de multiplicits finies.}$$

Dmonstration. La dmonstration se copie sur celle de [Fur04, lemma 3.1] en utilisant le lemme 3.8. On l'applique chaque $(x(t), e)$ pour $t \in [0,1]$ et on obtient des voisinages $\mathcal{V}_t$ et des ε_t. On extrait un recouvrement fini de $[0,1]$:

$$\left[0 = s_0, s_0 + \delta_0^+\right[, \dots, \left]s_i - \delta_i^-, s_i + \delta_i^+\right[, \dots, \left]s_{N-1} - \delta_{N-1}^-, s_{N-1} = 1\right]$$

et on pose

$$t_0 = s_0 = 0, t_1 = s_0 + \delta_0^+, \dots, t_{N-1} = s_{N-2} + \delta_{N-2}^+, t_N = s_{N-1} = 1$$

et

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{s_{j-1}}.$$

□

On dira qu'une telle subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ est admissible pour les ε_j, $j = 1, \dots, N$. Posons

$$k(t, \varepsilon_j) = \sum_{0 \le \theta \le \varepsilon_j} \mu(x(t), e, \theta) \quad \text{pour } t_{j-1} \le t \le t_j.$$

Lemme 4.2. *Soit $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ une subdivision admissible pour les ε_j, $j = 1, \dots, N$ et les $\widetilde{\varepsilon}_j$, $j = 1, \dots, N$. Alors pour tout $1 \le j \le N$,*

$$k(t_j, \varepsilon_j) - k(t_{j-1}, \varepsilon_j) = k(t_j, \widetilde{\varepsilon}_j) - k(t_{j-1}, \widetilde{\varepsilon}_j)$$

Dmonstration. Supposons que $\varepsilon_j \ge \widetilde{\varepsilon}_j$. Alors

$$k(t, \varepsilon_j) - k(t, \widetilde{\varepsilon}_j) = \sum_{\widetilde{\varepsilon}_j \le \theta \le \varepsilon_j} \mu(x(t), e, \theta).$$

Mais si γ est le cercle de diamtre $\left[e^{i\varepsilon_j}, e^{i\widetilde{\varepsilon}_j}\right]$, et $p_t = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\lambda e - x(t))^{-1} \mathrm{d}\lambda$ alors $\sum_{\widetilde{\varepsilon}_j \le \theta \le \varepsilon_j} \mu(x(t), e^{i\theta} e) = \operatorname{rang}(p_t)$. Mais $t \mapsto p_t$ est continue donc le rang de p_t est constant. □

Proposition-Dfinition 4.3. *La quantit*

$$Mas(x(t), e) = \sum_{j=1}^{N} (k(t_j, \varepsilon_j) - k(t_{j-1}, \varepsilon_j))$$

ne dpend ni des t_j, ni des ε_j, pourvu que la subdivision $t_0, \dots, t_N$ soit admissible pour les ε_j. On l'appelle l'indice de Maslov du chemin $x(t)$ par rapport au point e.

Dmonstration. La dmonstration utilise le lemme prcdent comme dans [Fur04, Proposition 3.3]. □

Thorme 4.4. *L'indice de Maslov (par rapport un point fix) est additif pour la concatnation des chemins et invariant par homotopie.*

Le Lemme 3.8 permet encore une fois d'adapter la dmonstration de [Fur04, Theorem 3.6].

5. LA DIMENSION FINIE

Dans cette partie on suppose E de dimension finie. Soient x et e dans Σ. Il existe d'uniques nombres complexes $u_1, \dots, u_k$, de module 1 et tous distincts, et un unique systme complet d'idempotents orthogonaux $c_1, \dots, c_k$ de l'algbre de Jordan $A(e)$ tels que (cf. [FK94, Proposition X.2.3 et Theorem III.1.1])

$$x = u_1 c_1 + \cdots + u_k c_k.$$

L'indice de transversalit est simplement

$$\mu(x, e, \theta) = \mu(x, e^{i\theta} e) = \sum_{j \text{ tq } u_j = e^{i\theta}} \operatorname{rang}(c_j).$$

Exemple 5.1. On calcule l'indice de Maslov dans le cas du cercle pour les chemins suivants :

(i) $x(t) = e^{it\varphi} e$, o $\varphi \in [0, \pi[$.
On choisit $\varphi < \varepsilon < \pi$ et alors

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon} e) = 0 \text{ pour } t \in [0, 1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i\varphi} e, e^{i\theta} e) - \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e, e^{i\theta} e) = 1 - 1 = 0$$

(ii) $x(t) = e^{i(t\varphi + \psi)} e$, o $\psi \in]0, 2\pi[$ et $0 < \varphi < 2\pi - \psi$.
On choisit $0 < \varepsilon < \min\{\psi, 2\pi - (\varphi + \psi)\}$ et alors

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon} e) = 0 \text{ pour } t \in [0, 1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i(\varphi + \psi)} e, e^{i\theta} e) - \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i\psi} e, e^{i\theta} e) = 0 - 0 = 0$$

(iii) $x(t) = e^{-it\varphi}e$, o $\varphi \in [0, \pi[$.
On choisit $\varphi < \varepsilon < \pi$ et alors

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon}e) = 0 \text{ pour } t \in [0,1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e^{i\varphi}e, e^{i\theta}e) - \sum_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mu(e, e^{i\theta}e) = 0 - 1 = -1.$$

On peut alors construire un indice pour les couples de points dans le revtement universel $\widetilde{\Sigma}$ de Σ (dont une construction se trouve dans [CK07]). Si $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\tau}$ ont pour projections respectives σ et τ alors on pose $Mas(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, e) = Mas(x(t), e)$ o x est n'importe quel chemin d'extrmits σ et τ dont le relvement d'origine $\widetilde{\sigma}$ se termine en $\widetilde{\tau}$. On note $m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau})$ l'indice de Souriau gnralis[1] construit dans [CK07] et $\iota(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ l'indice triple de [Cle04].

On suppose dsormais que E est simple, autrement dit que $A(e)$ est simple (ie. ne contient pas d'idal non trivial). Alors la composante connexe $K^{(e)}$ du groupe des automorphismes de $A(e)$ agit de manire transitive sur l'ensembles des repres de Jordan de $A(e)$ (systmes complets d'idempotents primitifs, cf. [FK94]).

Thorme 5.2. *Soient $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\tau}$ dans $\widetilde{\Sigma}$, de projections respectives σ et τ, et soit e dans Σ. Alors*

$$\text{(E)} \qquad Mas(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, e) = \frac{1}{2}(m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) + \iota(e, \tau, \sigma) + \mu(\tau, e) - \mu(\sigma, e)).$$

Dmonstration. Soient

$$\widetilde{\sigma} = (\sigma = \sum e^{i\varphi_j} c_j, r\varphi) \quad \text{et} \quad \widetilde{\tau} = (\tau = \sum e^{i\phi_j} d_j, r\phi)$$

deux points de $\widetilde{\Sigma}$, (c_j) et (d_j) tant deux repres de Jordan de $A(e)$. Posons $\widetilde{\tau}' = (\tau' = \sum e^{i\phi_j} c_j, r\phi)$. Il existe $k \in K^{(e)}$ tel que $kd_j = c_j$, $j = 1 \ldots r$, et soit $t \mapsto k_t$ un chemin dans $K^{(e)}$ tel que $k_0 = id$ et $k_1 = k$. Alors $t \mapsto (\sum e^{i\phi_j} k_t d_j, r\phi)$ est un chemin dans $\widetilde{\Sigma}$ et on note $t \mapsto x(t)$ sa projection. Alors $Mas(\{x(t)\}, e)$ est nul car $\mu(x(t), e)$ est constant. Soit $\widetilde{e}$ un point de $\widetilde{\Sigma}$ au dessus de e. Alors d'après la formule de Leray (cf. [CK07]

$$m(\widetilde{\tau}, \widetilde{\tau}') + \iota(e, \tau', \tau) + \mu(\tau', e) - \mu(\tau, e) = m(\widetilde{e}, \widetilde{\tau}') - m(\widetilde{e}, \widetilde{\tau}).$$

Comme le second membre de (E) est aussi additif pour la concatnation des chemins, il suffit de dmontrer (E) en remplaant $\widetilde{\tau}$ par $\widetilde{\tau}'$. Supposons que $\varphi_j \in [0, 2\pi[$ et que $r\varphi = \sum \varphi_j$, ce qui est possible sans perte de gnralit. On considre le chemin

$$t \mapsto \sum e^{i(1-t)\varphi_j} c_j$$

[1] Dans le cas de la Lagrangienne, cet indice est en fait le double de l'indice de Souriau.

Son relev d'origine $\widetilde{\sigma}$ se termine en $(e,0)$, et son indice de Maslov est nul puisqu'il se dcompose en une succession de chemins unidimensionnels d'indices de Maslov nuls. D'autre part, si on pose $l = \#\{j \mid \varphi_j = 0\ [2\pi]\}$ alors

$$m(\widetilde{\sigma},(e,0)) + \iota(e,e,\sigma) + \mu(e,e) - \mu(\sigma,e) = -(r-l) + 0 + r - l = 0,$$

et donc il reste montrer que le formule est vrai si $\widetilde{\sigma} = (e,0)$. Supposons que $\phi_j \in [0,2\pi[$ et que $r\phi = \sum \phi_j + 2k\pi$. L'indice de Maslov du chemin

$$t \mapsto \sum e^{it\phi_j}$$

est nul, et si $l = \#\{j \mid \phi_j = 0\,[2\pi]\}$ alors

$$m((e,0),(\tau,\sum\phi_j)) + \iota(e,\tau,e) + \mu(\tau,e) - \mu(e,e) = r - l + 0 + l - r = 0.$$

Considrons enfin le chemin

$$t \mapsto e^{i\phi_1 + 2kt\pi} + \sum_{j=2}^{r} e^{i\phi_j},$$

dont le relev d'origine $(\tau,\sum\phi_j)$ se termine en $\widetilde{\tau}$. Son indice de Maslov vaut k, tout comme le membre de droite de (E). $\square$

Remarque 5.3. En faisant $\sigma = \tau$ dans l'quation (E) on voit que l'indice d'un lacet ne dpend pas du point par rapport auquel on le calcule.

Remarque 5.4. En faisant $\sigma = e$, on obtient

$$Mas(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau},\sigma) = \frac{1}{2}(m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}) + \mu(\tau,\sigma) - r)$$

et donc on peut retrouver l'indice de Souriau, puis l'indice triple par la formule de Leray, grce ce nouvel indice.

Un indice triple a t construit en dimension infinie par Neeb et Ørsted (cf. [NØ06]), mais il est valeur dans le groupe fondamental du groupe structural de E.

Problme 5.5. Associer une quantit numrique cet indice, et pouvoir retrouver cet indice triple numrique grce l'indice pour les chemins.

Références

[Arn67] V. I. Arnol′d, *On a characteristic class entering into conditions of quantization*, Funkcional. Anal. i Priložen. **1** (1967), 1–14.

[Arn85] ———, *Sturm theorems and symplectic geometry*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **19** (1985), no. 4, 1–10, 95.

[BBF98] Bernhelm Booss-Bavnbek and Kenro Furutani, *The Maslov index : a functional analytical definition and the spectral flow formula*, Tokyo J. Math. **21** (1998), no. 1, 1–34.

[BKU78] Robert Braun, Wilhelm Kaup, and Harald Upmeier, *A holomorphic characterization of Jordan C^*-algebras*, Math. Z. **161** (1978), no. 3, 277–290.

[CI00] C.-H. Chu and J. M. Isidro, *Manifolds of tripotents in* JB**-triples*, Math. Z. **233** (2000), no. 4, 741–754.

[CK07] Jean-Louis Clerc and Khalid Koufany, *Primitive du cocycle de Maslov généralisé*, Math. Ann. **337** (2007), no. 1, 91–138.

[Cle04] Jean-Louis Clerc, *L'indice de Maslov généralisé*, J. Math. Pures Appl. (9) **83** (2004), no. 1, 99–114.

[CØ01] Jean-Louis Clerc and Bent Ørsted, *The Maslov index revisited*, Transform. Groups **6** (2001), no. 4, 303–320.

[CØ03] ______, *The Gromov norm of the Kaehler class and the Maslov index*, Asian J. Math. **7** (2003), no. 2, 269–295.

[DS88] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear operators. Part II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988, Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[FK94] Jacques Faraut and Adam Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994, , Oxford Science Publications.

[Fur04] Kenro Furutani, *Fredholm-Lagrangian-Grassmannian and the Maslov index*, J. Geom. Phys. **51** (2004), no. 3, 269–331.

[Hes96] Gerald Hessenberger, *On operator-commutative subalgebras of Jordan algebras*, Jordan Theory Preprint Archives (1996).

[Jac68] Nathan Jacobson, *Structure and representation of Jordan algebras*, American Mathematical Society, 1968.

[Kau77] Wilhelm Kaup, *Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds*, Math. Ann. **228** (1977), no. 1, 39–64.

[Kau83] ______, *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces*, Math. Z. (1983), no. 4, 503–529.

[KU77] Wilhelm Kaup and Harald Upmeier, *Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces*, Math. Z. **157** (1977), no. 2, 179–200.

[Ler77] Jean Leray, *Analyse lagrangienne et mécanique quantique*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles (1976–1977), I, Collège de France, Paris, 1977, pp. Exp. No. 1, 303.

[Loo77] Ottmar Loos, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Lectures Note, Irvine, 1977.

[MM77] J. Martinez Moreno, *"sobre algebras de Jordan normadas"*, Tesis doctorales de la Universidad de Granada, vol. 149, 1977.

[MM80] J. Martínez Moreno, JV-*algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **87** (1980), no. 1, 47–50.

[NØ06] Karl-Hermann Neeb and Bent Ørsted, *A topological Maslov index for 3-graded Lie groups*, J. Funct. Anal. **233** (2006), no. 2, 426–477.

[Sou76] Jean-Marie Souriau, *Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications*, Group theoretical methods in physics (Fourth Internat. Colloq., Nijmegen, 1975), Springer, Berlin, 1976, pp. 117–148. Lecture Notes in Phys., Vol. 50.

[Upm76] Harald Upmeier, *Über die Automorphismengruppen von Banach-Mannigfaltigkeiten mit invarianter Metrik*, Math. Ann. **223** (1976), no. 3, 279–288.

[Upm85] ______, *Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 104, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 96.

[Vig76] Jean-Pierre Vigué, *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **9** (1976), no. 2, 203–281.

[Wri77] J. D. Maitland Wright, *Jordan C^*-algebras*, Michigan Math. J. **24** (1977), no. 3, 291–302.

Fachbereich Mathematik, AG AGF, Technische Universitt Darmstadt, Schlossgartenstrasse 7, 64289 Darmstadt

E-mail address: merigon@mathematik.tu-darmstadt.de